FICHE CONSEIL MATHS

INÉGALITÉS

RÈGLES À RETENIR

Soient $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$.

- Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$;
- Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $c\,b \leq c\,a$ en particulier si $a \leq b$ alors $-b \leq -a$;
- Si $0 \leq a \leq b$ alors $a^2 \leq b^2$;
- Si $a \leq b \leq 0$ alors $b^2 \leq a^2$.

ERREURS À ÉVITER

- Si $a \leq b$ et $c \leq d$ **on n'a pas forcément** $a - c \leq b - d$, (voir remarque de l'exemple 1).
- Si $a \leq b$ **on n'a pas forcément** $a^2 \leq b^2$, (voir remarque de l'exemple 2).

EXEMPLE 1

On considère deux suites u et v telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$ et $-3 \leq v_n \leq 2$

Donnez un encadrement de la suite w où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - v_n$.

Solution.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $-3 \leq v_n \leq 2$ donc $-2 \leq -v_n \leq 3$ et puisque $0 \leq u_n \leq 1$ alors

$-2 \leq u_n - v_n \leq 4$ c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-2 \leq w_n \leq 4$.

Remarque. **Il fallait surtout éviter l'erreur fréquente :** $0 - (-3) \leq u_n - v_n \leq 1 - 2$.

EXEMPLE 2

Soit u une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-2 \leq u_n \leq 3$, donnez un encadrement de la suite v où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = {u_n}^2$

Solution.

Remarque. **Il faut surtout éviter l'erreur suivante :**

$-2 \leq u_n \leq 3$ donc $(-2)^2 \leq {u_n}^2 \leq 3^2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $-2 \leq u_n \leq 3$.

- **1^er^ cas :** si $-2 \leq u_n \leq 0$ alors $(0)^2 \leq {u_n}^2 \leq (-2)^2$ d'où $0 \leq {u_n}^2 \leq 4$.
- **2^ème^ cas :** si $0 \leq u_n \leq 3$ alors $(0)^2 \leq {u_n}^2 \leq 3^2$ d'où $0 \leq {u_n}^2 \leq 9$.

Conclusion.

$0 \leq {u_n}^2 \leq 9$ c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq 9$.