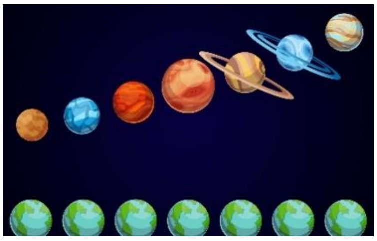
Atelier 1

DERIVABILITE – FONCTION CONVEXE/CONCAVE SUR UN INTERVALLE

Abdelrhani DAOUDI

Introduction

La dérivée est une notion importante utilisée dans différents domaines, en particulier pour résoudre certains problèmes d'optimisation.
En économie et en finance, certaines concepts/modèles sont représentés par des fonctions convexité et/ou concave. Vue de face, des parties des montagnes Russes, sont des courbes représentatives de fonctions convexes et/ou concaves.

I. Dérivabilité

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[$ où $r > 0$.

On dit que f est dérivable au point x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe

On note alors $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Remarque

On a : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Donc f est dérivable au point x_0 si $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe et

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Exercice

Montrer que la fonction $f: x \to \frac{1}{x}$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et $f'(x_0) = \frac{-1}{{x_0}^2}$.

Solution

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} [f(x_0 + h) - f(x_0)]$$

Donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0} \right)$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{x_0 - (x_0 + h)}{x_0(x_0 + h)} \right)$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{-h}{x_0(x_0 + h)} \right)$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + h)}$$
$$= \frac{-1}{{x_0}^2}$$

Conclusion. $f: x \to \frac{1}{x}$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et $f'(x_0) = \frac{-1}{{x_0}^2}$

Donc pour tout point $x \in \mathbb{R}^*$ on a $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

Remarque

f est dérivable en un point x_0 $\Leftrightarrow$ C_f la courbe représentative de f admet une tangente au point $A(x_0, f(x_0))$.

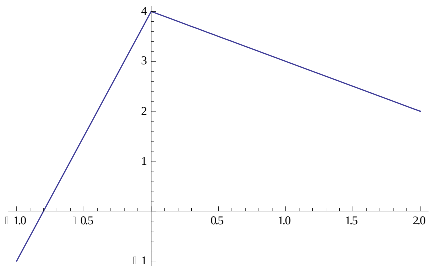
Théorème

Si f est dérivable en un point x_0, l'équation de la tangente au point $A(x_0, f(x_0))$ est $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ ou $\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$.

de plus la pente de la tangente est $p = f'(x_0)$ **.**

Remarque

Si la courbe représentative d'une fonction admet un point anguleux alors cette fonction n'est pas dérivable en ce point.



$A(0,4)$ est un point anguleux donc la fonction n'est pas dérivable en 0

Exercice

Les fonctions représentées par les figures ci-dessous sont-elles dérivables sur $\left]-2,3\right[$?

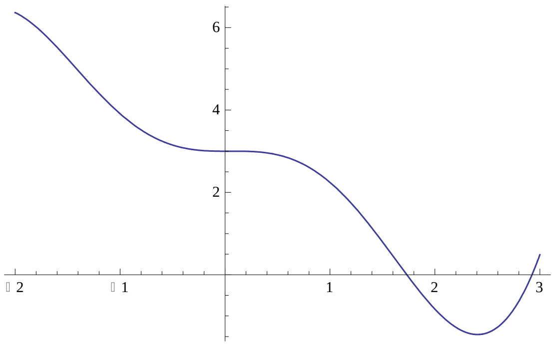


Figure 1

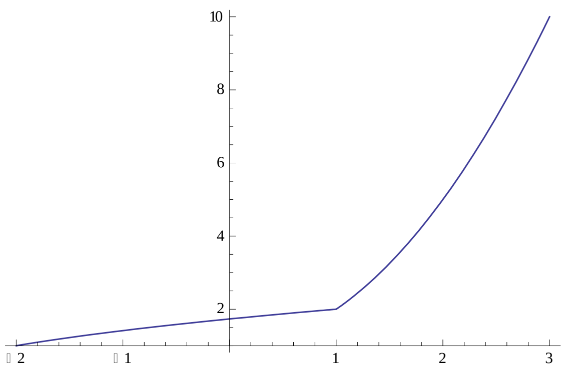


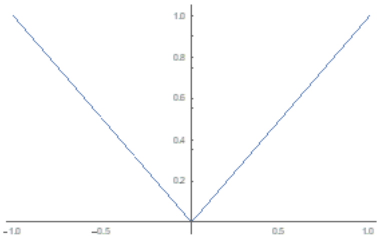
Figure 2

Solution

La fonction représentée sur la Figure 1 est dérivable sur $\left]-2,3\right[$ mais la fonction représentée sur la Figure 2 n'est pas dérivable sur $\left]-2,3\right[$.

Théorème
Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.
Si f est dérivable en a de I alors f est continue en a (mais la réciproque est fausse).

Exemple
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = |x|$.
f est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en 0.



Représentation de la fonction valeur absolue sur $]-1,1[$

Théorème (important).

Soient où $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$ et f, g deux fonctions définies sur un intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[$

1) Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en x_0 alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$(\alpha f + \beta g)$ est dérivable en x_0, en particulier $f + g$ et $f - g$ sont dérivables en x_0.

2) Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2 ; a < b$ on a :

f est dérivable sur $]a, b[$ si et seulement si f est dérivable en chaque point x_0 de $]a, b[$.

Propriétés

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Alors pour tout $x \in I$ on a :

1) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

2) $(f\times g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ en particulier $\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=\frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$

Dérivées de fonctions élémentaires

$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
e^x	e^x
$Ln(x)$	$\frac{1}{x}$
x^α	$\alpha\cdot x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$

Exercice

1) Montrer que $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}=1$.(à retenir)

2) Calculer $\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{x}$.

Solution

1) On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=sin(x)$.
On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=cos(x)$.
On remarque que $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ et puisque f est dérivable en 0 alors $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=cos(0)=1$.

2) On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=cos(x)$.
On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=-sin(x)$.
On remarque que $\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ et puisque f est dérivable en 0 alors $\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=-sin(0)=0$.

Exemples : **Dérivées de fonctions (cas particuliers)**

Dans le tableau ci-dessous u désigne une fonction dérivable

$f(x)$	$f'(x)$
$\cos(\omega x+\varphi)$	$-\omega\cdot\sin(\omega x+\varphi)$
$\sin(\omega x+\varphi)$	$\omega\cdot\cos(\omega x+\varphi)$
$u(ax+b)$	$a\cdot u'(ax+b)$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)\cdot e^{u(x)}$
e^{ax}	ae^{ax}
$Ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$(u(x))^n$	$nu'(x)\cdot(u(x))^{n-1}$

Exercice

Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$.

Solution

Méthode 1

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Méthode 2

On considère la fonction $f:]-2,,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :
$\forall x \in]-2,,+\infty[, f(x) = \sqrt{x+2} = \sqrt{u(x)}$ où $u(x) = x+2$
Pour $x \in]-2,+\infty[$ on a $x+2>0$, $x \to x+2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \to \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc f est dérivable sur $]-2,+\infty[$ et

$$\forall x \in]-2,+\infty[, f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

De plus $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ et puisque f est dérivable en 0 alors $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Domaine de définition (D_f) et domaine de dérivabilité ($D_{f'}$) des fonctions usuelles

$f(x)$	D_f	$D_{f'}$
$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$[0,+\infty[$	$]0,+\infty[$
$Ln(x)$	$]0,+\infty[$	$]0,+\infty[$

Exercice

Préciser le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x - \dfrac{e^x - 1}{e^{2x}+1}$ utiliser : $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

2) $f(x)=\frac{1}{x}\cos(2x+1)+e^{x^2}=\frac{\cos(2x+1)}{x}+e^{x^2}$

utiliser : $(e^{u(x)})'=u'(x)\cdot e^{u(x)}$ et $(\cos(\omega x+\phi))'=-\omega\cdot\sin(\omega x+\phi)$.

3) $f(x)=Ln(\frac{x-1}{x})$

4) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

Solution

1) $f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^{2x}+1}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

$x\to x$; $x\to e^x$ et $x\to\frac{e^x-1}{e^{2x}+1}$ et $\forall x\in\mathbb{R}, e^x>0$ de plus :

$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=1-\frac{e^x(e^{2x}+1)-(e^x-1)(2e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}=1-\frac{-e^{3x}+2e^{2x}+e^x}{(e^{2x}+1)^2}$.

2) $f(x)=\frac{1}{x}\cos(2x+1)+e^{x^2}=\frac{\cos(2x+1)}{x}+e^{x^2}$

utiliser : $(e^{u(x)})'=u'(x)\cdot e^{u(x)}$ et $(\cos(\omega x+\phi))'=-\omega\cdot\sin(\omega x+\phi)$

f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[-2\,sin(2x+1)\times x]-[1\times cos(2x+1)]}{x^2}+2xe^{x^2} \\ &= \frac{-2x\,sin(2x+1)-cos(2x+1)}{x^2}+2xe^{x^2} \end{aligned}$$

3) $f(x)=Ln(\frac{x-1}{x})$

Utiliser : $[Ln(u(x))]'=\frac{u'(x)}{u(x)}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Le domaine de dérivabilité de $x\to Ln(x)$ est $]0,+\infty[$.

Dans notre exercice $u(x)=\frac{x-1}{x}$

Rappel

$\frac{a}{b}>0\Leftrightarrow a\times b>0$

$\frac{x-1}{x}>0\Leftrightarrow(x-1)x>0\Leftrightarrow x^2-x>0$

	$-\infty$	0 $\quad$ 1	$+\infty$
signe de (x^2-x)	$+$	$-$	$+$

Donc $\frac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow (x-1)x > 0 \Leftrightarrow x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x \in (\,]-\infty, 0[\, \cup \,]1, +\infty[\,)$

Conclusion : f est dérivable en tout point de $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

De plus $\forall x \in (\,]-\infty, 0[\,\cup\,]1, +\infty[\,), f\,'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ $où$ $u(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$

$donc$ $u'(x) = \frac{x-(x-1)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$ (Ou bien $u'(x) = 0 - \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$)

$$f\,'(x) = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{x^2} \times \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x^2 - x}$$

4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Utiliser $(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ dans notre cas $u(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

Le domaine de dérivabilité de $x \to \sqrt{x}$ est $]0, +\infty[$.

	$-\infty$	-1 $\quad$ 1	$+\infty$
signe de (x^2-1)	$+$	$-$	$+$

Donc $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in (\,]-\infty, -1[\,\cup\,]1, +\infty[\,)$

Conclusion : f est dérivable en tout point de $]-\infty, -1[\,\cup\,]1, +\infty[$

De plus

$\forall x \in (\,]-\infty, -1[\,\cup\,]1, +\infty[\,), f\,'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ $où$ $u(x) = x^2 - 1$ $donc$ $u'(x) = 2x.$

$$f\,'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Définition

f est strictement monotone sur l'intervalle $[a,b]$ si f est strictement croissante sur l'intervalle $[a,b]$ ou f est strictement décroissante sur l'intervalle $[a,b]$.

Théorème

1) Si f est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\forall x \in I \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},\ f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

2) Si f est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\forall x \in I \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},\ f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.

II. Application

Déterminer la longueur et la largeur d'un rectangle de surface $25m^2$ pour que son périmètre soit minimal.

Solution

On note x la largeur du rectangle et y sa longueur ($x > 0$ et $y > 0$).

Sa surface est $S = x\,y = 25$ et son périmètre est $p = 2(x+y) = 2(x + \frac{25}{x})$

On cherche alors le minimum de la fonction $f(x) = 2(x + \frac{25}{x})$ sur $]0, +\infty[$.

On sait que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) = 2(1 - \frac{25}{x^2}) = 2(\frac{x^2 - 25}{x^2}) = \frac{2}{x^2}(x-5)(x+5)$$

Or $\forall x \in]0, +\infty[, \frac{2(x+5)}{x^2} > 0$ d'où pour $x \in]0, +\infty[,\ signe(f'(x)) = signe(x-5)$

	0	5 $\quad +\infty$
$signe(f'(x)) = signe(x-5)$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

Donc f admet un minimum au point $x = 5$ or $x\,y = 25$ par suite $y = 5$.

Conclusion. Pour un rectangle de surface $25m^2$ son périmètre est minimum si sa largeur est $5m$ et sa longueur est $5m$.

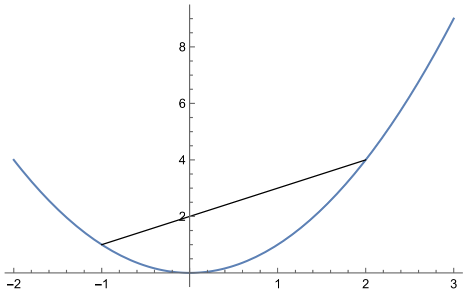
Ça correspond donc à un carrée de côté $5m$.

III. Fonction convexe/concave sur un intervalle

Définition

Soient f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère.

Soient A et B deux points de C_f alors la droite (AB) est appelée sécante de C_f .



Représente une sécante d'une courbe

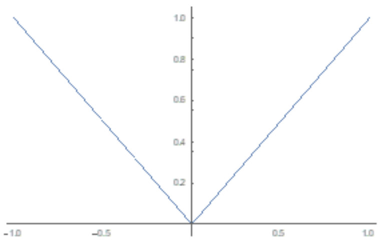
Définitions

Soient f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère.

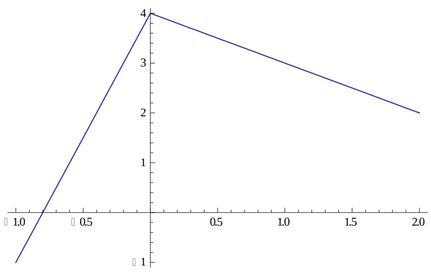
1) La fonction f est convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si C_f est en dessous de ses sécantes.

2) La fonction f est concave sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si C_f est au-dessus de ses sécantes.

Exemples



Graphe d'une fonction convexe



Graphe d'une fonction concave

Propriétés

1) Si f est une fonction convexe sur un intervalle I alors pour tous réels x et y de I et pour tout $t \in [0\,,1]$ on a :

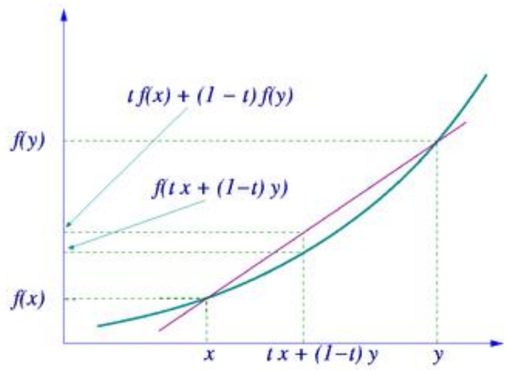
$$f(t\,x+(1-t)\,y) \leq\ t\,f(x)\ +(1-t)\,f(y)$$

En particulier $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$

2) Si f est une fonction concave sur un intervalle I alors pour tous réels réels x et y de I et pour tout $t \in [0\,,1]$ on a :

$$f(t\,x+(1-t)\,y) \geq\ t\,f(x)\ +(1-t)\,f(y)$$

En particulier $f(\frac{x+y}{2})\ \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$



Graphe d'une fonction convexe

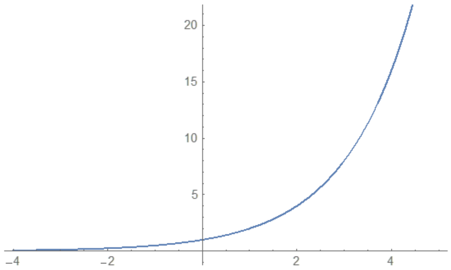
Définitions (cas d'une fonction dérivable)

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et C_f la courbe représentative de f dans un repère.

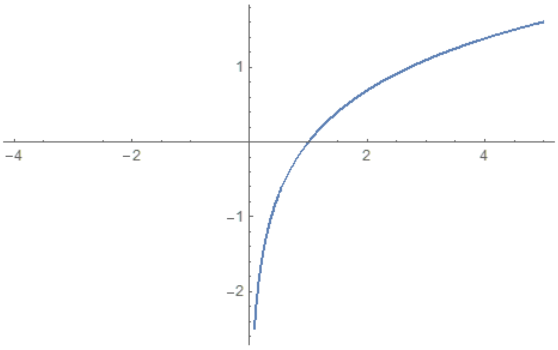
1) la fonction f est **convexe** sur I lorsque, sur I, la courbe C_f est située au-dessus de chacune de ses tangentes.

2) la fonction f est **concave** sur I lorsque, sur I, la courbe C_f est située en-dessous de chacune de ses tangentes.

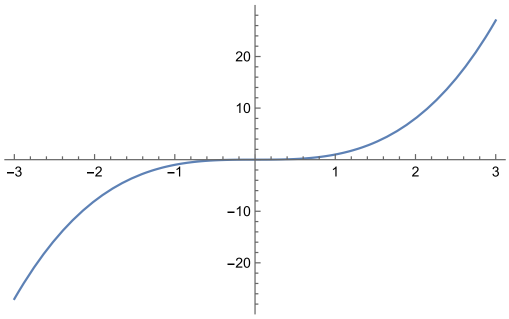
Exemples



Graphe d'une fonction dérivable et convexe $]-4,+\infty[$



Graphe d'une fonction dérivable et concave sur $]0,+\infty[$



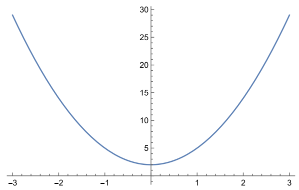
Graphe de la fonction $x \to x^3$: elle n'est ni convexe, ni concave sur $]-3\,,3[$

mais elle est concave sur $]-3{,}0[$ et convexe sur $]0{,}3[$

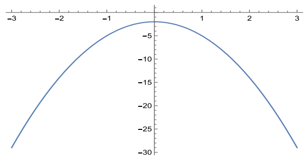
Remarque

Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$.

f est une fonction convexe sur I si et seulement si $(-f)$ est une fonction concave sur I.



Courbe représentative de la fonction $x \to 3x^2 + 2$ convexe sur $]-3,3[$



Courbe représentative de la fonction $x \to -3x^2 - 2$ convexe sur $]-3,3[$

Exemples

1) les fonctions $x \to x^2$; $x \to e^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

2) les fonctions $x \to \sqrt{x}$; $x \to ln(x)$ sont concaves sur $]0, +\infty[$.

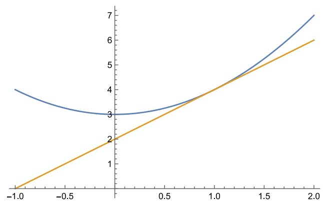
3) la fonction $x \to x^3$ est concave sur $]-\infty, 0[$ et elle est convexe sur $]0, +\infty[$. Elle n'est ni convexe ni concave sur $\mathbb{R}$.

Théorème (conséquence de la définition)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1) Si f est convexe sur I alors pour tout $x_0 \in I$ et pour $x \in I$ on a :

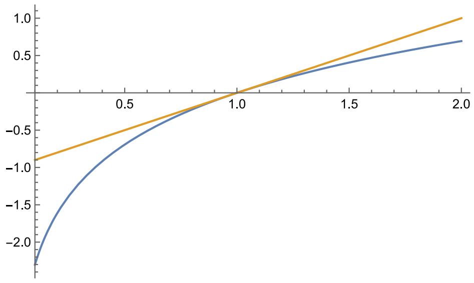
$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



La courbe d'une fonction dérivable et convexe est au dessus de chacune de ses tangentes

2) Si f est concave sur I alors pour tout $x_0 \in I$ et pour $x \in I$ on a :

$$f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



courbe d'une fonction dérivable et concave est en dessous de chacune de ses tangentes

Exemples

1) $f: x \to e^x$ est une fonction dérivable et convexe sur $\mathbb{R}$, de plus

$f(0) = e^0 = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x$.

L'équation de la tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$ est

$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x + 1$

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.

Idem l'équation de la tangente au point d'abscisse $x_0 = 1$ est

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = e(x - 1) + e = e\,x$$

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x \geq e\,x$.

2) $f: x \to ln(x)$ est dérivable et concave sur $]0, +\infty[$, de plus

$f(0) = ln(1) = 0$ et pour tout $x \in\,]0, +\infty[$ $f'(x) = \frac{1}{x}$.

L'équation de la tangente au point d'abscisse $x_0 = 1$ est

$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = x - 1$

Donc pour tout x de $]0, +\infty[$, $ln(x) \leq x - 1$.

Remarque importante et pratique (voir Exercice d'application ci-dessous)

Dans un exercice où on étudie la convexité/concavité d'une fonction dérivable sur un intervalle. Si on vous demande d'établir une inégalité sur cet intervalle après avoir demandé l'équation d'une tangente en un point, **pensez à utiliser le théorème ci-dessus, c'est-à-dire pensez à la position de la courbe par rapport à chacune de ses tangentes.**

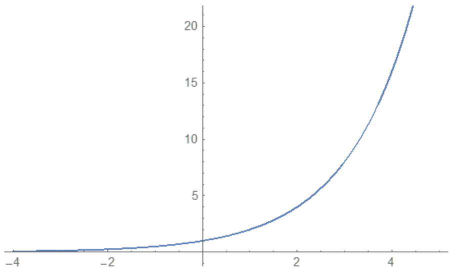
Théorème 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction dérivable sur I et $f\,'$ sa fonction dérivée.
1) f est convexe sur I si et seulement si $f\,'$ est croissante sur I.
2) f est concave sur I si et seulement si $f\,'$ est décroissante sur I.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f\,'(x) = e^x$ et puisque, $f\,' : x \to e^x$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$,



Graphe de la fonction $x \to e^x$

Conclusion. f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
f est une fonction deux fois dérivables sur I si f est dérivable sur I et sa fonction $f\,'$ est dérivable sur I .
On appelle dérivée seconde de la fonction f, notée f '', la dérivée de f '.

Exemples

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3$.

On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f\,'(x) = 6x^2$.

Idem on a $f\,'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f\,''(x) = 12\,x$.

Conclusion : f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f\,''(x) = 12\,x$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

On a f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$,

$f\,'(x) = e^x$ et $f\,''(x) = e^x$.

Théorème 2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction deux fois dérivable sur I .
1) f est convexe sur I si et seulement si pour tout réel x de I, $f''(x)$ est positive.
2) f est concave sur I si et seulement si pour tout réel x de I, $f''(x)$ est négative.

Exemples

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.
f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f''(x) = e^x$.
Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $f''(x) > 0$ (positive), par suite f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -3x^2 + 2x + 4$.
f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -6x + 2$ et $f''(x) = -6$.
Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $f''(x) < 0$ (négative), par suite f est concave sur $\mathbb{R}$.

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 4x$.
f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 4$ et $f''(x) = 6x$.
Donc pour tout x de $]-\infty, 0[$, $f''(x) < 0$ d'où f est concave sur $]-\infty, 0[$.
Idem pour tout x de $]0, +\infty[$, $f''(x) > 0$ d'où f est convexe sur $]0, +\infty[$.

Exercice

f est la fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 1 + x^3$.

C_f est la courbe représentative de f dans un repère.

1) Etudier le signe de $f''(x)$ et déduire la convexité de f suivant les valeurs de x.

2) Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

3) Déterminer que, pour tout x de $[0, +\infty[$, $x^3 \geq 3x - 2$.

Solution

1) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.

Donc pour tout x de $[0, +\infty[$, $f''(x) \geq 0$, par suite f est convexe sur $[0, +\infty[$.

Idem pour tout x de $]-\infty, 0]$, $f''(x) \leq 0$, par suite f est concave sur $]-\infty, 0]$.

2) L'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1 est

$y = f'(1)\,(x-1) + f(1) = 3(x-1) + 2 = 3x - 1.$

3) D'après la question 1), f est convexe sur$[0, +\infty[$, $1 \in [0, +\infty[$, donc C_f est au-dessus de la tangente du point d'abscisse 1.

Or l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1 est $y = 3x - 1$.

Par suite pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) \geq 3x - 1$ c'est-à-dire $1 + x^3 \geq 3x - 1$

Donc pour tout $x \in [0, +\infty[$, $x^3 \geq 3x - 2$.

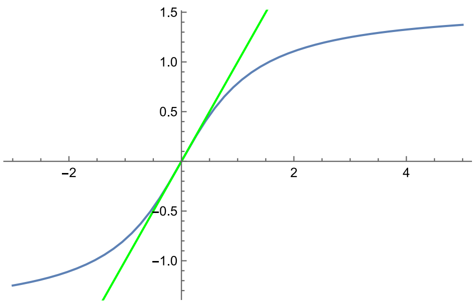
IV. Point d'inflexion

Définition

Soient f une fonction deux fois dérivables sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative sur cet intervalle dans un repère.

Soit $A(a\,, f(a))$, un point de C_f et T_A la tangente à C_f au point A.

On dit que $A(a\,, f(a))$, est un point d'inflexion pour C_f si, au point A, la courbe C_f traverse la tangente T_A.



Théorème

Soient f une fonction deux fois dérivables sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative sur cet intervalle dans un repère.

Un point $A(a\,, f(a))$ de C_f est un point d'inflexion si et seulement si $f\,''(a)$ s'annule en changeant de signe (c'est-à-dire $f\,''(a) = 0$ et $f\,''(x)$ change de signe sur un intervalle $]a - r, a + r[$ où $r > 0$).

![esiea — INGÉNIEUR·E·S D'UN NUMÉRIQUE UTILE]

Exemple

Soit f la fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ définie par : pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ alors $f\,'(x) = 3\,x^2$ et $f\,''(x) = 6x$.
Donc $f\,''(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq 0$ et $f\,''(x) \leq 0$ si et seulement si $x \leq 0$.
Il y a un changement de signe de la dérivée seconde, donc f change de convexité par suite le point $O(0{,}0)$ est un point d'inflexion.

Exercice

Soit f la fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
Déterminer les points d'inflexions (s'ils existent) de f.

Solution

En utilisant la propriété $(\frac{u}{v})' = \frac{u'\,v - v'\,u}{v^2}$, on a alors :

Pour tout réel x , $f\,'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ et $f\,''(x) = \frac{-\,2x(1+x^2)^2-[2\times 2x(1+x^2)(1-x^2)]}{(1+x^2)^4}$

En développant, on a $f\,''(x) = \frac{2x^5-4x^3-6x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^4-2x^2-3)}{(1+x^2)^4} = \frac{2x[(x^2-1)^2-4]}{(1+x^2)^4}$

Par suite $f\,''(x) = \frac{2x(x^2-1-2)(x^2-1+2)}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)(x^2+1)}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}$

(Identités remarquables : $(a-b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2\ et\ (a^2-b^2) = (a-b)(a+b)$)

Or pour tout réel x, $(1+x^2)^3 > 0$ d'où

$f\,''(x) = 0$ si et seulement si $2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$ et le signe de $f\,''(x)$ est celui de $2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

On a : $f\,''(x) = 0$ si et seulement si $x = 0\ ou\ x = \sqrt{3}\ \ ou\ \ x = -\sqrt{3}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x$		-			0		+		
$(x-\sqrt{3})$		-					0	+	
$(x+\sqrt{3})$		-	0		+				
$2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$		-	0	+	0	-	0	+	
$f\,''(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Conclusion :

La fonction f admet trois d'inflexions : $A(-\sqrt{3}\,, f(-\sqrt{3}))$, $B(0, f(0))$ et $C(\sqrt{3}\,, f(\sqrt{3}))$ c'est-à-dire $A(-\sqrt{3}\,, \frac{-\sqrt{3}}{4})$, $B(0,0)$ et $C(\sqrt{3}\,, \frac{\sqrt{3}}{4})$.