



# FICHE CONSEIL MATHS

## LIMITE D'UNE SUITE

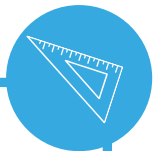
IL Y A PLUSIEURS MÉTHODES POUR DÉTERMINER LA LIMITE D'UNE SUITE. FRÉQUEMMENT ON UTILISE L'UNE DES PROPRIÉTÉS/MÉTHODES CI-DESSOUS. NOUS CONSACRERONS UNE FICHE SPÉCIALE POUR LES SUITES GÉOMÉTRIQUES ET LES SUITES ARITHMÉTIQUE-GÉOMÉTRIQUES.

### PROPRIÉTÉS ET MÉTHODES À RETENIR

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$  .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$  .

Soient  $u$  ,  $v$  et  $w$  des suites.  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $p \in \mathbb{N}$ .

### MÉTHODE 1 : OPÉRATION SUR LES LIMITES



- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = b$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha u_n = \alpha a$  ;  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = a + b$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = a b$  et si  $b \neq 0$  on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$  .

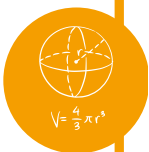
**Exemple :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3\left(\frac{\sqrt{n}}{n} + 2\right) = 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n} + 2\right) = 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2\right) = 6$  .

### MÉTHODE 2 : COMPARAISON

On suppose que pour tout entier naturel  $n \geq p$  ,  $u_n \leq v_n$ .

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

**Exemple :** Si pour tout entier naturel  $u_n \geq \sqrt{n}$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$



### MÉTHODE 3 : THÉORÈME DES GENDARMES

Si pour tout entier naturel  $n \geq p$  ,  $u_n \leq v_n \leq w_n$

Et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = a$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$ .

**Exemple.** Déterminer la limite de la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = \frac{2 \cos n}{\sqrt{n}}$  .

**Solution.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on sait que  $-1 \leq \cos n \leq 1$  et  $\frac{2}{\sqrt{n}} > 0$  d'où  $-\frac{2}{\sqrt{n}} \leq \cos n \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$

de plus  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$  alors d'après le théorème des gendarmes on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  .

