FICHE CONSEIL MATHS

LIMITE D'UNE SUITE

IL Y A PLUSIEURS MÉTHODES POUR DÉTERMINER LA LIMITE D'UNE SUITE. FRÉQUEMMENT ON UTILISE L'UNE DES PROPRIÉTÉS/MÉTHODES CI-DESSOUS. NOUS CONSACRERONS UNE FICHE SPÉCIALE POUR LES SUITES GÉOMÉTRIQUES ET LES SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES.

PROPRIÉTÉS ET MÉTHODES À RETENIR

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$; $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Soient u , v et w des suites. a $\in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$.

MÉTHODE 1 : OPÉRATION SUR LES LIMITES

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = b$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha\, u_n = \alpha\, a$;
  $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + v_n = a + b$; $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n\, v_n = a\, b$ et si $b \neq 0$ $on\ a$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$.

Exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} 3(\frac{\sqrt{n}}{n} + 2) = 3 \lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{\sqrt{n}}{n} + 2) = 3 \lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}} + 2) = 6$.

MÉTHODE 2 : COMPARAISON

On suppose que pour tout entier naturel $n \geq p$, $u_n \leq v_n$.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Exemple : Si pour tout entier naturel $u_n \geq \sqrt{n}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

MÉTHODE 3 : THÉORÈME DES GENDARMES

Si pour tout entier naturel $n \geq p$, $u_n \leq v_n \leq w_n$

Et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = a$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = a$.

Exemple. Déterminer la limite de la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{2 \cos n}{\sqrt{n}}$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on sait que $-1 \leq \cos n \leq 1$ et $\frac{2}{\sqrt{n}} > 0$ d'où $-\frac{2}{\sqrt{n}} \leq \cos n \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$

de plus $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-2}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$ alors d'après le théorème des gendarmes on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.